XXII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2015

28 февраля

---

10 класс

---

1. Отношение масс Плутона и Харона равно 8.6. Харон обращается вокруг Плутона за 6.4 земных суток. Масса Плутона равна $13 \cdot 10^{21}$ кг. Докажите, что система Плутон–Харон является «двойной планетой» (т.е. центр масс системы находится снаружи как Харона, так и Плутона).

Решение:

Воспользуемся III законом Кеплера и найдем расстояние между Плутоном и Хароном:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{G(M_{\mathrm{Pl}} + M_{\mathrm{Ch}})},$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2 G(M_{\mathrm{Pl}} + M_{\mathrm{Ch}})}{4\pi^2}},$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{(6.4 \cdot 86400)^2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot (1 + 1/8.6) \cdot 1.3 \cdot 10^{22}}{4 \cdot 3.14^2}} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ м} = 20 \text{ тыс. км.}$$

Здесь M_{Pl} и M_{Ch} — массы Плутона и Харона соответственно.
Как известно, расстояние до центра масс обратно пропорционально массе тела, поэтому расстояние от центра Плутона до барицентра составляет

$$r_{\mathrm{Pl}} = a \cdot \frac{M_{\mathrm{Ch}}}{M_{\mathrm{Pl}} + M_{\mathrm{Ch}}} = 20 \cdot \frac{1}{8.6 + 1} \approx 2 \text{ тыс. км.}$$

Осталось выяснить, как соотносится r_{Pl} с радиусом Плутона. Для этого оценим среднюю плотность планеты с массой, равной массе Плутона и радиусом $R = r_{\mathrm{Pl}}$:

$$\rho = \frac{M_{\mathrm{Pl}}}{\frac{4}{3}\pi r_{\mathrm{Pl}}^3} = \frac{3 \cdot 1.3 \cdot 10^{22}}{4 \cdot 3.14 \cdot (2 \cdot 10^6)^3} \approx 4 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3.$$

Получаем, что плотность такой планеты существенно меньше любой разумной оценки плотности Плутона (которая в действительности составляет около $2 \cdot 10^3$ кг/м^3), а значит, r_{Pl} превышает радиус Плутона (на самом деле радиус Плутона равен 1153 км; помнить это, разумеется, не требовалось). Таким образом, мы доказали, что барицентр системы «Плутон–Харон» находится вне Плутона. Из этого следует, что барицентр не находится и внутри Харона, так как последний не превышает Плутон по размеру и массе.

2. При спектральных наблюдениях Солнца была зарегистрирована линия некоторого элемента с длиной волны 525 нм. Каким способом можно выяснить, возникла эта линия в солнечной атмосфере или появилась в результате прохождения солнечного света через атмосферу Земли?

Решение:

Атмосферы Солнца и Земли имеют различную температуру. Температура фотосферы Солнца $T_{\odot}$ составляет порядка $6 \cdot 10^3$ К, в то время как атмосфера Земли, очевидно, гораздо холоднее — ее температуру $T_\oplus$ можно оценить в $(200 \div 300)$ К. Это значит, что одни и те же атомы на Земле и на Солнце будут двигаться с разной скоростью:

$$v_{\text{тепл}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура атмосферы, m — масса атома.
Как известно, тепловое движение атомов приводит к уширению спектральных линий вследствие эффекта Доплера:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_{\text{тепл}}}{c},$$

где λ — длина волны, c — скорость света. Таким образом, ширины спектральных линий, образующихся в атмосферах Солнца и Земли, различаются в

$$\frac{\Delta\lambda_\odot}{\Delta\lambda_\oplus} = \frac{v_{\text{тепл}\odot}}{v_{\text{тепл}\oplus}} = \sqrt{\frac{T_\odot}{T_\oplus}} \approx \sqrt{\frac{6\cdot 10^3}{2.5\cdot 10^2}} \approx 5 \text{ раз.}$$

Это различие можно легко заметить, именно оно и позволяет выяснить место образования линий.

3. Как-то ночью любитель астрономии наблюдал, как геостационарный спутник прошел прямо через центр диска Луны. На каких широтах Земли возможно такое наблюдение?

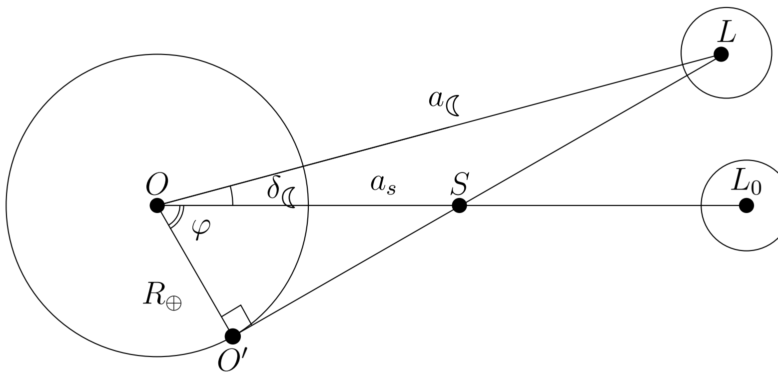
Решение:

Геостационарный спутник – это спутник, который обращается вокруг Земли в плоскости экватора с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси (таким образом, он всегда «висит» над одной и той же точкой земной поверхности). Учитывая, что продолжительность звездных суток на Земле T_s равна $23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}} \approx 1$ суткам, найдем радиус геостационарной орбиты a_s по III закону Кеплера:

$$\left(\frac{T_s}{T_☾}\right)^2 = \left(\frac{a_s}{a_☾}\right)^3,$$

$$a_s = a_☾ \cdot \left(\frac{T_s}{T_☾}\right)^{\frac{2}{3}} = 384 \cdot \left(\frac{1}{27.3}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 42 \text{ тыс. км.}$$

Здесь $a_☾$ и $T_☾$ – полуось орбиты и период обращения Луны вокруг Земли соответственно. Теперь нужно найти такие широты на Земле φ, на которых возможно наблюдать геостационарный спутник S точно на одной линии с Луной (см. рисунок):



Очевидно, что это условие выполняется на экваторе ($\varphi = 0°$, Луна в точке L_0), а также в некотором диапазоне широт вплоть до некоторой предельной широты, которую и нужно найти. Дальнейшее решение задачи «в лоб» оказывается довольно сложным, поэтому поступим по-другому: найдем предельную широту, на которой еще можно наблюдать геостационарные спутники и вычислим склонение Луны $\delta_{☾}$, необходимое для удовлетворения условий задачи. Обозначив радиус Земли как $R_{\oplus}$, из прямоугольного треугольника $OO'S$ получаем:

$$\varphi = \arccos \frac{R_{\oplus}}{a_s} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{R_{\oplus}}{a_s} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{R_{\oplus}}{a_s} = \frac{\pi}{2} - \frac{6.4}{42} \approx 1.42 \text{ рад.} \approx 81^\circ.$$

Далее из треугольника $OO'L$ получаем:

$$\varphi + \delta_{☾} = \arccos \frac{R_{\oplus}}{a_{☾}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{R_{\oplus}}{a_{☾}} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{R_{\oplus}}{a_{☾}} = \frac{\pi}{2} - \frac{6.4}{384} \approx 1.55 \text{ рад.},$$

$$\delta_{☾} = 1.55 - 1.42 = 0.13 \text{ рад.} \approx 7^\circ.5.$$

Склонение Луны действительно может принимать такие значения, так как угол наклона эклиптики к экватору гораздо больше ($\approx 23^\circ.5$). Таким образом, наблюдать прохождение геостационарного спутника через центр диска Луны можно на всех широтах, с которых видны эти спутники, т.е. от 81° с.ш. до 81° ю.ш.

4. В центре Валинора находилась Лаурелин, одно из Древ Валар, освещавших Бессмертные Земли. Известно, что свет от ее кроны по яркости был сравним с солнечным у корней дерева, а границы Валинора находились там, куда проникал свет Лаурелин и где его яркость была не меньше, чем у полной Луны.

Древо начало расти из маленького саженца в начале времен, причем каждый год его высота увеличивалась на 1 метр. Найдите зависимость радиуса Валинора от времени. Можно считать, что Валинор располагался на планете, радиус которой совпадает с радиусом Земли.

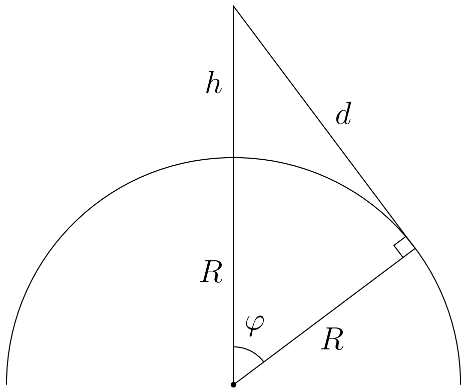
Решение:

Пусть h — высота Древа, выраженная в метрах. Тогда высота h будет численно равна количеству лет, прошедших с начала времен. Так как освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника, а у корней дерева она всегда одинакова и равна солнечной ($\approx -27^m$), можно считать, что светимость Древа увеличивается пропорционально h^2. По условию звездная величина Лаурелин на границе Валинора не превышала звездной величины Луны в полнолунии ($\approx -13^m$), а значит, отличалась от яркости у корней Древа не более чем на 14^m. Отсюда находим ограничение сверху на радиус Валинора r:

$$\left(\frac{r}{h}\right)^2 = \frac{E_{\odot}}{E_{☾}} = 10^{0.4 \cdot 14},$$

$$r = h \cdot \sqrt{10^{0.4 \cdot 14}} = 10^{2.8} \cdot h = 100 \cdot 2.512^2 \approx 630\, h.$$

Таким образом, размер области, в которой яркость Древа не меньше яркости Луны, линейно растет со временем. Однако, очевидно, что Древо не может освещать земли, находящиеся за линией горизонта. В предельном случае бесконечно высокого Древа Валинор будет занимать половину планеты, т.е. его радиус (по поверхности планеты) составит $r = \pi R/2 \approx 3.14 \cdot 6400/2 \approx 10$ тыс. км (здесь R — радиус Земли).
Найдем высоту Древа, при которой граница Валинора будет достигать горизонта (см. рисунок):



$$d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} \leqslant 630h,$$

$$2Rh + h^2 \leqslant (630h)^2,$$

$$h \geqslant 5 \cdot 10^{-6} \cdot R \approx 32 \text{ м}.$$

После того, как высота Древа превысит 32 м (радиус Валинора в этот момент составит $630 \cdot 0.032 \approx 20$ км), дальнейшее увеличение светимости Древа перестанет иметь значение, и границы Валинора будут расширяться за счет понижения горизонта:

$$r = R\varphi = R \cdot \arccos \frac{R}{R+h}.$$

Итак, сформулируем окончательный ответ: первые 32 года радиус Валинора растет линейно как $r(t) = 630\,t$, где r выражено в метрах, а t – в годах. По достижении $r \approx 20$ км расширение Валинора замедлится и будет происходить по закону $r(t) = R{\cdot}\arccos \frac{R}{R+t}$ (здесь R также выражено в метрах). В дальнейшем радиус Валинора не превысит 10 тыс. км (по поверхности планеты).

5. При исследовании звезды, похожей на Солнце, оказалось, что она является переменной. Для объяснения этого были выдвинуты две гипотезы:

A) переменность связана с пятном на поверхности вращающейся звезды (температура пятна равна температуре обычных солнечных пятен);

B) переменность вызвана изотермическим расширением и сжатием звезды.

Оцените, на сколько процентов могут отличаться максимально и минимально возможные радиусы звезды в рамках второй гипотезы, если известно, что первая гипотеза также количественно согласуется с данными наблюдений.

Решение:

Рассмотрим крайний случай в рамках первой гипотезы, когда весь видимый диск звезды закрыт пятном. Температура солнечных пятен T_{sp} составляет около 4500 K, температура Солнца $T_{\odot}$ — порядка 6000 K. Так как радиус звезды не меняется, то светимость зависит только от температуры поверхности. Отношение блесков в максимуме и минимуме составит

$$\frac{L_{\max}}{L_{\min}} = \left(\frac{T_{\odot}}{T_{\text{sp}}}\right)^4.$$

Согласно второй гипотезе, температура, а, значит, и светимость единицы площади поверхности звезды остаются постоянными. Изменение блеска происходит только за счет изменения размеров звезды, и, как следствие, излучающей площади, т.е.

$$\frac{L_{\max}}{L_{\min}} = \left(\frac{R_{\max}}{R_{\min}}\right)^2.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{R_{\max}}{R_{\min}} = \left(\frac{T_\odot}{T_{\text{sp}}}\right)^2 = \left(\frac{6 \cdot 10^3}{4.5 \cdot 10^3}\right)^2 = 1.8.$$

Таким образом, максимально возможный радиус примерно на 80% больше минимального.