XXX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2023

12 февраля

10 класс

1. Звезда в настоящее время находится на расстоянии 30 пк от Солнца и движется прямолинейно и равномерно. Ее лучевая скорость в данный момент равна нулю, а ее собственное движение составляет $0''.5$/год. Можно ли будет обнаружить лучевую скорость у этой звезды спустя 100 лет, если вести наблюдения в оптическом диапазоне со спектрометром, обладающим точностью 0.1 Å?

Решение:

Оценим полную скорость звезды, равную в настоящий момент тангенциальной скорости; тангенциальная скорость связана с собственным движением μ (в угловых секундах в год) и расстоянием r (в парсеках) соотношением

$$V = V_\tau = 4.74\mu r = 4.74 \cdot 0.5 \cdot 30 \approx 70\,\text{км/с}.$$

Определим лучевую скорость звезды спустя 100 лет. За это время звезда преодолеет расстояние, в световых годах равное

$$d = 100 \cdot \frac{V}{c} = 100 \cdot \frac{70}{3 \cdot 10^5} = 0.024\,\text{св. года} = 0.008\,\text{пк}.$$

Лучевая компонента скорости будет равна

$$V_r \approx V \cdot \frac{d}{r} = 0.02\,\text{км/с}\,.$$

Даже если считать, что наблюдения проводятся близ красной границы оптического диапазона ($\lambda \approx 7000\,\text{Å}$), то смещение спектральных линий составит не более

$$\Delta\lambda = \lambda \cdot \frac{v}{c} = 7 \cdot 10^3 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^5} = 5 \cdot 10^{-4}\,\text{Å}.$$

На спектрометре с указанной точностью измерить лучевую скорость не удастся.

Комментарии:

Линейная скорость звезды — 1 балл, пройденное расстояние — 2 балла, пройденное угловое расстояние — 1 балл, расчет лучевой скорости — 2 балла, вычисление какой-либо величины для сравнения (минимально возможная лучевая скорость, итоговое смещение линий и другое) — 1 балл, итоговый ответ (бинарный) — 1 балл.

Вычислительная ошибка на этапе снимает 1 балл, при этом остальные этапы оцениваются независимо.

Многие участники вычисляли угол не из треугольника, а умножением угловой скорости на время. Строго говоря, это надо обосновывать, но такой способ засчитывался.

Иногда участник не понимал, как работал спектрометр. Тогда не оценивался этап с вычислением сравнительной величины, остальные этапы оценивались независимо.

А.В.Веселова

2. Вокруг звезды обращается экзопланета, похожая по параметрам на Землю, орбитальный период которой равен 73 суткам. Оцените максимально возможный эксцентриситет ее орбиты. Абсолютная звездная величина звезды равна $-0^m.6$, температура $3.4 \cdot 10^3$ К, гравитационное ускорение на ее поверхности равно 0.7 м/с^2.

Решение:

Определим светимость звезды. По формуле Погсона для данной звезды и для Солнца

$$M_\odot - M = 2.5 \lg L/L_\odot,$$

поэтому

$$L = L_\odot \cdot 10^{0.4\cdot(M_\odot - M)}$$

Сравнивая ее с Солнцем, напишем

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4,$$

откуда

$$\frac{R}{R_\odot} = 10^{0.2\cdot(M_\odot - M)} \cdot \left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2,$$

Ускорение свободного падения на поверхности звезды можно выразить как $g = \dfrac{G\mathfrak{M}}{R^2}$, где G — гравитационная постоянная.

Определим большую полуось орбиты из третьего закона Кеплера, сравнив данную систему с Солнечной: $P^2/a^3 = 1/\mathfrak{M}$, где период обращения P выражен в годах, большая полуось a — в астрономических единицах, масса звезды $\mathfrak{M}$ — в массах Солнца. Тогда большая полуось равна $a = (\mathfrak{M} \cdot P^2)^{1/3}$. Перицентрическое расстояние орбиты планеты не должно быть меньше радиуса звезды: $a(1-e) \geqslant R$, а в предельном теоретическом случае может совпадать с ним $a(1-e) = R$, отсюда $e = 1 - R/a$.

Для удобства вычислим отношение R/a, воспользовавшись уже имеющимися результатами:

$$\frac{R}{a} = \frac{R}{(\mathfrak{M} \cdot P^2)^{1/3}} = \frac{R}{\left(\dfrac{gR^2}{G} \cdot P^2\right)^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{GR}{gP^2}} = \sqrt[3]{\frac{GR_\odot \cdot 10^{0.2\cdot(M_\odot - M)} \cdot \left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2}{gP^2}}$$

Некоторой проблемой является то, что мы получили результат в конкретной, так называемой «звездноастрономической» системе единиц, а часть данных в него нам надо подставлять в СИ. Однако все не так страшно. Хорошо известно (а если нет, то это легко получить, записав III закон Кеплера для системы Солнце–Земля), что в этой системе единиц $G = 4\pi^2 \approx 40$. Радиус Солнца в ней же — это попросту угловой радиус Солнца в радианах, то есть

$$R_\odot \approx \frac{\pi}{180} \cdot \frac{16}{60} \approx 5 \cdot 10^{-3}$$

(кстати, помнить, что диаметр Солнца — это с неплохой точностью 1/100 а.е., бывает полезно; тот же результат, конечно, можно получить, просто зная радиус Солнца в метрах и величину астрономической единицы в них же).

Сложнее всего с ускорением свободного падения, выраженном в СИ. Однако

$$\frac{1\text{ м}}{1\text{ с}^2} = \frac{\frac{1}{1.5\cdot 10^{11}}}{\left(\frac{1}{3\cdot 10^7}\right)^2}\text{ а.е./год}^2 = 6 \cdot 10^3\text{ а.е./год}^2,$$

поэтому в интересующей нас системе единиц $g = 0.7 \cdot 6 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^3$.

Период 73 дня — это $73/365 = 0.2$ года. Осталось только отношение температур, которое, поскольку является отношением, ни во что дополнительное переводить не надо:

$$\left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2 = \left(\frac{5.8\cdot 10^3}{3.4\cdot 10^3}\right)^2 = \left(\frac{5.8}{3.4}\right)^2 \approx 1.7^2 \approx 3.$$

Теперь мы готовы вычислить результат:

$$e = 1-\frac{R}{a} = 1-\sqrt[3]{\frac{40\cdot 5\ \cdot 10^{-3}\cdot 10^{0.2\cdot(4.8+0.6)}\cdot 3}{4\cdot 10^3\cdot 4\ \cdot 10^{-2}}} \approx 1-\sqrt[3]{\frac{15}{4}\cdot 10^{-3}} \approx 1-\sqrt[3]{\frac{4\cdot 10^3}{10^{-6}}} = 1-0.16 = 0.84.$$

Комментарии:

Из-за множества вычислений итоговый ответ мог сильно различаться, поэтому довольно много получили хорошие баллы без сходства с авторским ответом. Критерии, согласно авторскому решению: формула для радиуса звезды — 2 балла, формула для массы через g — 1 балл, понимание ограничения на эксцентриситет — 1 балл, выражение для большой полуоси — 2 балла, «компоновка» в итоговую формулу — 1 балл, итоговый ответ — 1 балл.

Однако большинство участников считало численно каждый этап, и поэтому вычисление светимости звезды — 1 балл, радиуса звезды — 2 балла, массы звезды — 1 балл, большой полуоси — 2 балла. Понимание ограничения и итоговый результат оцениваются по 1 баллу. За грубую вычислительную ошибку в этапе снимался 1 балл без влияния на следующие этапы.

В числе очень частых ошибок было получение абсурдных ответов (например, масса звезды на пару порядков меньше массы Солнца, например). В таком случае весь этап обнулялся.

Также зачастую участники, получив светимость в $10^{2.15}$ солнечной, округляли это число до 100. Это ошибкой не считалось и баллы не снимались.

А.В.Веселова, П.А.Тараканов

3. Оцените угловой размер диска Антареса при наблюдении с Земли.

Решение:

Попробуем систематизировать то, что мы знаем об Антаресе. Это красный гигант спектрального класса M, его эффективную температуру можно оценить как $T \approx 3\ \cdot 10^3$ K. Это одна из самых ярких звезд неба, хоть и не самая яркая, видимая звездная величина в оптическом диапазоне около $+1^m$.

Теперь можно решать задачу. Запишем соотношение между светимостью L, радиусом R и температурой T для Антарес и для Солнца:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2\cdot\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4.$$

Учтем, что освещенность, создаваемая звездой, выражается через ее светимость и расстояние до нее r как $E = \frac{L}{4\pi r^2}$ и получим

$$\frac{E}{E_\odot} = \left(\frac{R/r}{R_\odot/r_\odot}\right)^2\cdot\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4.$$

Поскольку R/r — это угловой радиус звезды (в радианах), то для угловых диаметров β можно записать соотношение

$$\frac{E}{E_\odot} = \left(\frac{\beta}{\beta_\odot}\right)^2\cdot\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4.$$

Теперь для удобства вычислений возьмем десятичный логарифм от обеих частей равенства, а заодно умножим их на 2.5. Получим

$$2.5\lg\frac{E}{E_\odot} = 5\ \lg\frac{\beta}{\beta_\odot} + 10\lg\frac{T}{T_\odot}.$$

Приглядевшись к левой части равенства, можно заметить, что это разность видимых звездных величин Солнца и Антареса (именно в таком порядке, поскольку там не было знака минус), а отношение температур $T/T_\odot \approx 1/2$. Поэтому

$$m_\odot - m = 5\ \lg\frac{\beta}{\beta_\odot} - 10\lg 2.$$

Тут уже можно начать подставлять числовые данные, но для начала стоит учесть еще одно обстоятельство. Антарес — холодный, светится он в основном в инфракрасном диапазоне, а это означает, что его болометрическая видимая звездная величина должна быть меньше $+1^m$ (для Солнца аналогичный эффект невелик и им можно пренебречь). Можно предположить, что болометрическая звездная величина равна примерно 0^m. Тогда, учитывая, что $\lg 10 \approx 0.3$, получим

$$-27 - 0\ = 5\ \lg\frac{\beta}{\beta_\odot} - 10\cdot 0.3$$

и

$$\lg\frac{\beta}{\beta_\odot} = -\frac{24}{5},$$

откуда

$$\frac{\beta}{\beta_\odot} = \frac{\sqrt[5]{10}}{10^5}.$$

Оценить числитель дроби справа, хотя он и выглядит неприятно, несложно. Как известно, $\sqrt[5]{100} \approx 2.512$. Следовательно, $\sqrt[5]{10} \approx \sqrt{2.512}$. Поскольку $256 = 16^2$, искомое число примерно равно 1.6.

Осталось вспомнить, что угловой диаметр Солнца немного больше $30'$, то есть $2\cdot 10^3$ угловых секунд. Тогда

$$\beta = 1.6\cdot 10^{-5}\cdot 2\ \cdot 10^3 = 0''.03.$$

В реальности получается $0''.02$, и связано это с тем, что мы недооценили температуру Антареса, она ближе к $3.4\cdot 10^3$ K (а заодно, наоборот, переоценили температуру Солнца). Если учесть это обстоятельство, вычисления станут даже чуть проще (множитель 1.6 фактически пропадет) и результат окажется идеально совпадающим с действительностью).

Комментарии:

Стандартное рассуждение про то, что из-за атмосферной турбулентности диск Антареса будет иметь размеры около $1''$, при грамотном изложении оценивалось 1 баллом. Участники, «совершенно случайно» помнившие расстояние до Антареса и его линейный радиус с 2-3 значащими цифрами, получают за задачу 0 баллов.

П.А.Тараканов

4. Один из астероидов семейства Атона, обнаруженный при максимальном сближении с Землей (произошедшем в январе 2003 года), обращается вокруг Солнца по практически круговой орбите с большой полуосью, чуть меньшей 1 а.е. Следующее его максимальное сближение с Землей ожидается в июле 2097 года. Найдите большую полуось орбиты этого астероида с погрешностью не более 10^{-3} а.е.

Решение:

Интервал времени между сближениями — это попросту синодический период астероида S. Поскольку мы знаем, что сидерический период астероида P чуть меньше одного года ($P_{\oplus} = 1$), то мы можем написать соотношение между периодами в виде

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{P_{\oplus}},$$

откуда

$$P = \frac{1}{1 + \frac{1}{S}}.$$

Периоды у нас уже выражены в годах, большую полуось надо найти в астрономических единицах, так что используем III закон Кеплера в его простейшем виде и получаем

$$a = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{S}}\right)^{2/3}.$$

В этот момент задача перестает быть тривиальной: результат надо получить с довольно высокой точностью и без калькулятора. Кажется, что это нелегко, но нам очень сильно поможет то, что синодический период большой, он, как несложно посчитать, равен $S = 94.5$ года, а обратная к нему величина, $1/S$, наоборот, маленькая.

Вспомним, что

$$(1 + x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x, \quad \text{если } x \approx 0$$

(интересно, что это приближение из года в год печатается в справочных данных различных этапов Всероссийской олимпиады по астрономии, но на него и его соседей обычно не обращают внимание, сразу же хватаясь за калькулятор — а зря). Мы воспользуемся им для $\alpha = -2/3$. Тогда

$$a = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{S}}\right)^{2/3} = \left(1 + \frac{1}{S}\right)^{-2/3} \approx 1 - \frac{2}{3S}.$$

Вычислим, насколько большая полуось отличается от единицы:

$$\frac{2}{3S} = \frac{2}{3 \cdot 94.5} \approx 0.007,$$

причем несложно заметить, что с точностью до тысячной результат не изменится, даже если мы округлим S до 90 или до 100 лет. Отсюда получаем нужный нам ответ с требуемой точностью: большая полуось равна 0.993 а.е.

Осталось только сказать, что это за объект. Данные из условия в точности соответствуют околоземному астероиду 2002 AA29, большая полуось орбиты которого равна 0.9926 а.е. Реальная погрешность использованных нами приближений — $3 \cdot 10^{-4}$ а.е.

Комментарии:

«Теоретическая» часть задачи состоит из двух с половиной тривиальных для 10 класса фактов: III закона Кеплера в простейшей форме и формулы синодического периода (еще половина — правильное раскрытие модуля в последней формуле), поэтому решение, в котором «все сделано в формульном виде», оценивалась не более чем 3 баллами. Все остальное — за вычисление результата, причем проделанное не на черновике, а непосредственно в работе. В частности, ответ, полученный в виде обыкновенной дроби, с сохраненными корнями и т.п. приводил к снятию баллов.

П.А. Тараканов

5. Два друга-астронома наблюдают один и тот же объект в любительские телескопы. Аркадий находится на северном берегу Ладожского озера ($\varphi = 62°, \lambda = 31°$), и для Аркадия объект едва выглядывает из-под горизонта в направлении на юг. Василий проводит наблюдения на горе Верблюд высотой 885 метров ($\varphi = 44°, \lambda = 43°$). На какой максимальной высоте над видимым горизонтом увидит этот объект Василий? Насколько раньше (или позже) по сравнению с Аркадием увидит объект Василий? Влиянием атмосферы можно пренебречь.

Решение:

Если для Аркадия в направлении на юг светило едва видно, это означает, что даже в верхней кульминации высота светила примерно равна нулю. Оценим склонение светила из этих данных:

$$h_{\text{ВК}} = 90° - \varphi + \delta, \quad 0 \ = 90° - 62° + \delta, \quad \delta = -28°.$$

Для Василия наибольшая высота объекта над горизонтом составит

$$h_{\text{ВК}} = 90° - \varphi + \delta = 90° - 44° - 28° = 18°.$$

Определим часовой угол точки захода светила:

$$\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta.$$

Можем считать, что $\operatorname{tg} 44° \approx 1$, $\operatorname{tg}(-28°) \approx -\operatorname{tg} 30° = -1/\sqrt{3} \approx -0.57$. Отсюда $\cos t = 0.57$. Угол t немного меньше $60°$, можно в качестве оценки взять $55° = 3^h 40^m$.

Для Василия верхняя кульминация звезды произойдет на $(43° - 31°) \cdot 4 \ = 48^m$ раньше, чем для Аркадия. Восход произойдет еще за $3^h 40^m$ до этого, то есть Василий увидит объект раньше Аркадия примерно на 4.5 часа.

Оценим также, требуется ли учитывать то, что Василий ведет наблюдения на горе — каково понижение горизонта при наблюдении с такой высоты?

Соответствующая задача настолько часто встречается, что, наверное, приводить ее полное решение не стоит (его можно посмотреть, например, в 5-й задаче теоретического тура параллели 9 класса прошлого года), достаточно лишь сформулировать ответ: искомый угол в радианах выражается как $\sqrt{2h/R_\oplus}$. Подставив числовые данные, получим $\sqrt{\frac{1.8 \cdot 10^3}{6.4 \cdot 10^6}} \approx \sqrt{1/3600} = 1/60$. Иначе говоря, даже если гора Верблюд находится на совершенно ровной местности, расположенной на уровне моря (что в реальности не так, перепад высот составляет около 0.5 км), понижение горизонта окажется около $1°$, то есть примерно такое же, как погрешность исходных данных задачи. Следовательно, учет этого обстоятельства не требуется.

Комментарии:

Учет понижения горизонта сам по себе не приводил к увеличению или снятию баллов, но при условии, что он был выполнен верно или хотя бы правдоподобно. Если участник получал понижение около $15°$, баллы за это снимались.

А.В.Веселова