XVII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2010

12 марта

10 класс

1. В Солнечной системе есть астероиды, обращающиеся вокруг Солнца по круговым орбитам с синодическим периодом 0.5 года, 1 год и 2 года. Оцените радиусы орбит этих астероидов и поясните свой ответ.

Решение:

Воспользуемся известным соотношением между синодическим периодом планеты (или астероида) T, сидерическим периодом T и сидерическим периодом Земли $P_\oplus$ (равным 1 году):

$$\frac{1}{S} = \left|\frac{1}{P} - \frac{1}{P_\oplus}\right|$$

Выражая отсюда сидерический период астероида и выражая все периоды в годах, получаем

$$P = \frac{1}{1 \pm 1/S} = \frac{S}{S \pm 1}.$$

Поставив данные о синодических периодах астероидов, находим, что первый астероид (с синодическим периодом 1/2 года) имеет сидерический период 1/3 года (второй вариант дает отрицательное значение периода), второй — сидерический период либо равен 1/2 года, либо стремится к бесконечности, третий — либо 2/3 года, либо 2 года.

Переход от сидерических периодов к радиусам орбит можно выполнить, воспользовавшись III законом Кеплера. Если периоды выражены в годах, а радиусы орбит — в астрономических единицах, то $P^2 = R^3$, поэтому $R = P^{2/3}$. Соответственно, радиус орбиты первого астероида составит $R_1 = \sqrt[3]{1/9} \approx 0.5$ а.е., радиус орбиты второго астероида либо $R_2 = \sqrt[3]{1/4} \approx 0.6$ а.е., либо очень велик, радиус орбиты третьего астероида либо $R_{3,1} = 0.8$ а.е., либо $R_{3,2} = 1.6$ а.е.

Отметим, что мы не рассмотрели случай, когда направление вращения астероида вокруг Солнца противоположно направлению вращения Земли. Однако очень немногочисленные объекты, обладающие этим свойством, по-видимому, являются бывшими ядрами комет, и к классическим астероидам не относятся.

2. Инопланетянин Йиээх получил на выбор две путевки в два санатория, один из которых находится в звездном скоплении h Персея, а другой — в звездном скоплении Ясли. Йиээх хочет отдохнуть или в более молодом скоплении, или в скоплении с более горячими звездами. Когда он гостил на Земле, он заметил, что максимальные блески звезд этих скоплений похожи, и узнал, что расстояние от Земли до h Персея 2 кпк, а до Яслей 200 пк. Возникнут ли у Йиээха затруднения с выбором и, если нет, то куда ему следует полететь на отдых?

Решение:

Прежде всего отметим, что оба требования Йиээха эквивалентны друг другу. При образовании скопления в нем присутствуют как горячие массивные, так и холодные маломассивные звезды, однако со временем массивные звезды, которые эволюционируют быстрее, превращаются в красные гиганты и затем становятся либо белыми карликами, либо вспыхивают как сверхновые. В итоге доля маломассивных звезд и более холодных звезд в скоплении растет с возрастом, так что скопление с в среднем более горячими звездами должно быть и сравнительно более молодым (и наоборот).

Так как максимальные блески звезд одинаковы, но скопление Ясли находится намного ближе к Земле, то это означает, что светимость ярчайших звезд в Яслях намного меньше, чем светимость ярчайших звезд в скоплении h Персея. Следовательно, в h Персея (в отличие от Яслей) массивные звезды еще не успели проэволюционировать и, следовательно, скопление h Персея существенно моложе, чем скопление Ясли. Отсюда, с учетом сказанного выше, следует, что h Персея по обоим критериям предпочтительнее.

3. Шарообразный искусственный спутник Земли в апогее невооруженным глазом не виден. В перигее, если спутник оказывается в зените, его звездная величина составляет $m = -4^m$. Оцените минимально возможный эксцентриситет орбиты такого спутника.

Решение:

Расстояние от центра Земли до спутника в перигее его орбиты составляет $r_\Pi = a(1-e)$, а в апогее — $r_A = a(1-e)$, где a — большая полуось орбиты спутника, а e — ее эксцентриситет. Спутник наблюдается с поверхности Земли, поэтому его звездная величина зависит от «приведенного расстояния» в перигее $r'_\Pi = a(1-e) - R_\oplus$ и в апогее $r'_A = a(1-e) - R_\oplus$, где $R_\oplus$ — радиус Земли.

Так как спутник в апогее орбиты не виден, можно принять, что в этот момент его звездная величина равна 6^m (требуется узнать минимальный эксцентриситет, так что эта оценка правомерна). Отсюда $m_A - m_\Pi = 6-(-4) = 10$, следовательно, освещенность, создаваемая спутником на Земле в апогее в 10^4 раз меньше, чем в перигее. Учитывая, что спутник шарообразный, т.е. освещенность от него зависит только от его расстояния до наблюдателя (расстояние от Солнца можно считать неизменным), получаем

$$\frac{r'_A}{r'_\Pi} = 100.$$

Получилось одно уравнение, связывающее две неизвестные величины a и e. Чтобы получить еще одно,вспомним, что спутники Земли не могут летать на высотах менее примерно 200 километров, т.е. $r'_\Pi \gtrsim 200$. Можно показать, что при возрастании r'_Π получаемый эксцентриситет также будет расти, так что минимальный эксцентриситет будет при минимальном r'_Π, т.е.

$$r'_\Pi = 200.$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r'_\Pi & = & 200 \\ \frac{r'_A}{r'_\Pi} & = & 100. \end{array} \right.$$

Отсюда

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(1-e) - R_\oplus & = & 200 \\ a(1+e) - R_\oplus & = & 20000 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a(1-e) & = & 6600 \\ a(1+e) & = & 26400 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1+e}{1-e} = 4.$$

Отсюда путем несложных преобразований получаем

$$e = \frac{4-1}{4+1} = 0.6.$$

4. Комета, находящаяся на расстоянии 1 а.е. от Земли, в некоторый момент для наземного наблюдателя оказалась полностью закрытой диском Луны. При этом толщина видимого серпа Луны составляла четверть поперечника диска. Оцените расстояние между кометой и Солнцем в этот момент, а также максимально возможную длину хвоста кометы.

Решение:

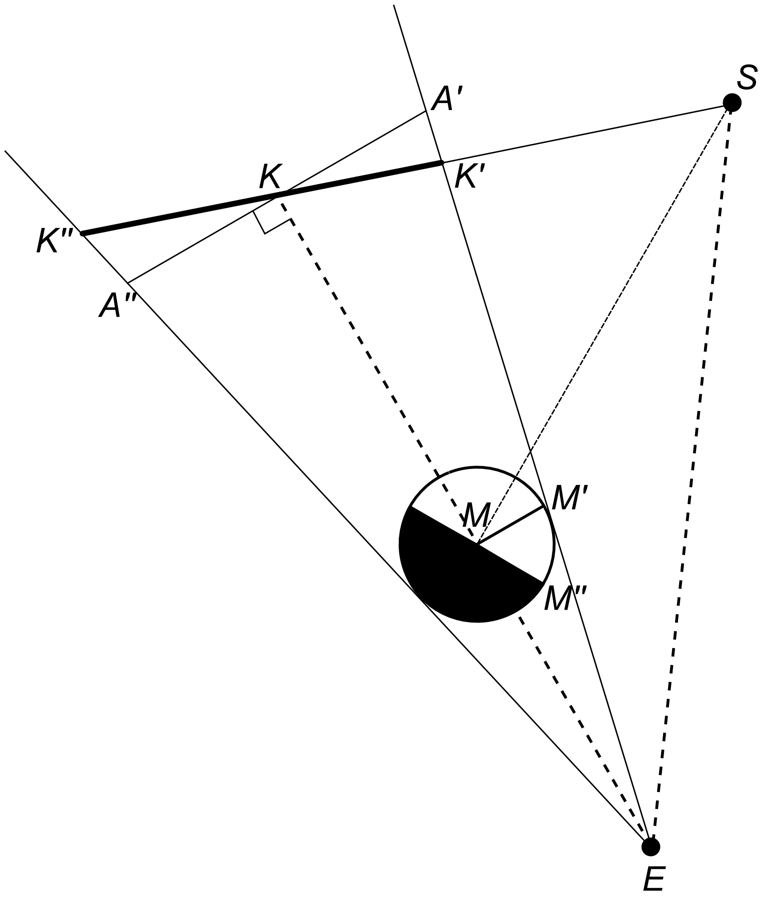

рис. 1

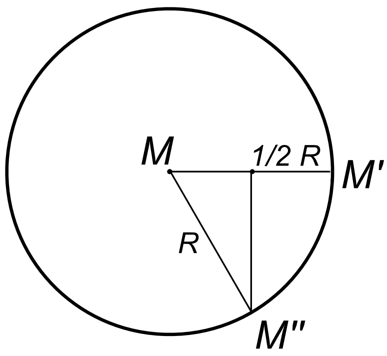

рис. 2

Рассмотрим рис. 1, изображающий взаимное расположение кометы, Луны, Земли и Солнца. Здесь $K'K''$ — максимально возможная длина хвоста кометы (хвост кометы всегда направлен от Солнца), SK — расстояние от Солнца до кометы, SE — расстояние от Земли до Солнца, EK — расстояние от Земли до кометы, $\angle M'MM'' \equiv \varphi$ — угол, ограничивающий видимую для земного наблюдателя часть лунного диска. По условию $SE = EK = 1$ а.е. Так как мы видим лунный диск в проекции на плоскость, перпендикулярную лучу зрения, то, как видно из рис. 2, $\cos\varphi = 1/2$ и, следовательно, $\varphi = 60°$.

Так как линии EK' и EK'' не параллельны друг другу, то $KK' \neq KK''$, однако $\angle K'EK'' = 0°.5$ — очень мал (он равен угловому поперечнику диска Луны, видимому с Земли), поэтому можно считать, что $EK' \parallel EK''$, а значит треугольники $K''KA''$ и $K'KA'$ — прямоугольные и равны друг другу. Тогда искомая длина хвоста $K'K'' = 2KK'$. Рассмотрим треугольники $A'EK$ и $A'K'K$. Из них

$$KK' = \frac{KA'}{\cos\angle A'KK'} = \frac{EK\,\mathrm{tg}\,\angle A'EK}{\cos\angle A'KK'}$$

$\angle A'EK = \angle K'EK''/2 = 0.°25$. Обозначим $\angle A'KK' \equiv \gamma$. Тогда

$$K'K'' = 2\frac{EK\,\mathrm{tg}\,0.°25}{\cos\gamma}.$$

Рассмотрим треугольник SEK. Из него можно найти расстояние от Солнца до кометы SK. Обозначим $\angle SEK \equiv \alpha$. $\triangle SEK$ — равнобедренный, поэтому

$$SK = 2SE \sin\frac{\alpha}{2}.$$

С другой стороны, воспользовавшись теоремой синусов, получаем

$$SK = SE\frac{\sin\alpha}{\sin\angle SKE} = SE\frac{\sin\alpha}{\sin(90-\gamma)}.$$

Отсюда

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90-\gamma)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\gamma} \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = \frac{\alpha}{2}.$$

Осталось найти угол α. Для этого рассмотрим $\triangle SME$. По теореме синусов

$$\frac{SE}{\sin\angle SME} = \frac{EM}{\sin\angle MSE}.$$

$\angle SME = \angle SMM' + \angle M'MM'' + \angle M''ME = (90° - \varphi) + \varphi + (90° - \varphi) = 180° - \varphi.$

Так как $\angle SME + \angle MSE + \angle SEM = 180°$, очевидно, что $\angle MSE = \alpha - \varphi$.

Тогда

$$\frac{SE}{\sin(180° - \varphi)} = \frac{EM}{\sin(\alpha - \varphi)} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin(\alpha - \varphi) = \frac{EM}{SE\sin\varphi}.$$

EM — расстояние от Земли до Луны — примерно в 400 раз меньше, чем SE — расстояние от Земли до Солнца, поэтому $\sin(\alpha-\varphi) \approx 0$ и $\alpha \approx \varphi = 60°$. Так что $\triangle SEK$ — практически равносторонний и, следовательно, расстояние от кометы до Солнца

$$SK \approx SE = 1 \text{ а.е.},$$

а длина хвоста кометы

$$K'K'' = 2\frac{\operatorname{tg} 0.°25}{\cos 30°} \approx 10^{-2} \text{ а.е.} \approx 1.5 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

5. Как «известно» из средств массовой информации, раз в 3600 лет из далекого космоса прямо к Земле подлетает гигантская планета Нибиру. Считая, что Нибиру похожа на Юпитер, оцените, в каких пределах должна меняться звездная величина Нибиру.

Решение:

По III закону Кеплера получим большую полуось орбиты $a = T^{2/3} \approx 235$ а.е. Раз Нибиру может приблизиться к Земле, ее орбита является очень вытянутой, с эксцентриситетом около 1. Тогда в афелии она удаляется от Солнца почти на $r = 2 \cdot a = 470$ а.е. Звездную величину в афелии оценим, сравнивая Нибиру с Юпитером. Звездная величина последнего меняется от -2 до -3 в разных конфигурациях, при среднем расстоянии от Солнца в 5 а.е.

$$m_1 - m_2 = 2.5\lg\frac{L_2}{L_1} = 2.5\lg\frac{r_2^4}{r_1^4} = 10\lg\frac{r_2}{r_1} = 19.7$$

Т.о. звездная величина Нибиру в афелии составляет примерно $17^m \div 18^m$, что, кстати, вполне доступно для наблюдений даже на сравнительно небольших современных телескопах. Теперь оценим интегральную звездную величину Нибиру, когда она подошла к Земле вплотную. «Вплотную» будем понимать буквально, считая что Земля будет находиться прямо у поверхности планеты, и Нибиру будет занимать ровно половину небесной сферы. В таком случае освещенность, создаваемая Нибиру на поверхности Земли, будет равна освещенности, создаваемой Солнцем, помноженной на альбедо поверхности Нибиру. Можно вспомнить альбедо Юпитера, а можно, учитывая, что требуется только оценка, считать, что альбедо Нибиру заключено между 0.04 (сажа) и 1 (зеркало). Во втором случае она будет также ярка, как Солнце, а в первом

$$m_1 - m_2 = 2.5 \lg \frac{L_2}{L_1} = 2.5 \lg \frac{a \cdot L_1}{L_1} = 2.5 \lg a = -1.4$$

$m_{\text{Н}} = -27 + 1.4 = -25.6$

Итог: звездная величина Нибиру меняется от $+17^m \div +18^m$ до $-26^m \div -27^m$.