# XXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

**теоретический тур, решения**

**2014**

**15 февраля**

## *11 класс*

**1.** Комета совершает один оборот вокруг Солнца за 8 лет. Чему равна большая полуось ее орбиты? С какими планетами Солнечной системы такая комета заведомо не может столкнуться?

**Решение:**

Если период обращения тела $P$, движущегося вокруг Солнца, выражен в годах, а большая полуось орбиты $a$ — в астрономических единицах, то III закон Кеплера можно записать в форме $P^2 = a^3$. Отсюда получаем, что $a = 4$ а.е.

Для того, чтобы пересечь как можно больше орбит планет (которые близки к круговым), орбита кометы должна быть насколько возможно более вытянутой. «Лучший» возможный случай получится тогда, когда орбита кометы близка к отрезку, в одном из концов которого находится Солнце. Тогда афелийное расстояние кометы будет практически равно $2 \cdot a = 8$ а.е. Комета не сможет столкнуться с планетами, радиус орбиты которых больше, это Сатурн, Уран и Нептун.

**2.** Антенна дальней космической связи (АДКС) диаметром 34 м передает сигнал на автоматическую межпланетную станцию (АМС) на частоте 2.3 ГГц. Передатчик АДКС имеет мощность 20 кВт. Оцените минимально возможный диаметр принимающей антенны на АМС, если известно, что минимальный предел чувствительности приемника, установленного на АМС, составляет $10^{-10}$ мкВт, а принимающая антенна должна обеспечивать прием на расстоянии до 100 а.е. от Земли.

**Решение:**

Предположим, что АДКС используется не для передачи сигнала, а для наблюдения какихлибо удаленных радиоисточников (т.е. фактически в режиме радиотелескопа). В таком случае ее предельное угловое разрешение, как известно, может быть найдено по формуле

$$\beta = \frac{\lambda}{D},$$

где $\lambda$ — длина волны принимаемого излучения, $D$ — диаметр антенны, $\beta$ — предельное угловое разрешение, выраженное в радианах.

Однако отсюда же следует, что если в фокусе антенны будет размещен передатчик пренебрежимо малого размера, то его излучение будет расходиться от антенны в пределах конуса, угол раскрыва которого также равен $\beta$. В самом деле: если при наблюдении на радиотелескопе два объекта, находящихся на угловом расстоянии меньше $\beta$, «сливаются» в один, то и излучение источника, находящегося в фокусе антенны, будет распространяться в обратном направлении и попадет на оба исходных объекта. Подобное свойство принимающих и передающих антенн принято называть «свойством обратимости».

Таким образом, АДКС испускает излучение в телесном угле, составляющем $\frac{\pi}{4}\beta^2$. Следовательно, на расстоянии $r$ при мощности излучения $L$ она будет создавать освещенность

$$E = \frac{L}{\frac{\pi}{4}\beta^2 r^2}$$

Принимающая антенна на АМС собирает излучение с площади, равной $\frac{\pi}{4}D'^2$, где $D'$ — диаметр принимающей антенны. Если ее предельная чувствительность составляет $L'$, то минимальный размер антенны, с которым еще будет возможен прием, удовлетворяет условию

$$E \cdot \frac{\pi}{4} D'^2 = L'.$$

Объединяя все полученные выражения и учитывая, что длина волны излучения $\lambda = c/\nu$, где $c$ — скорость света, $\nu$ — частота излучения, получаем

$$D' = \sqrt{\frac{L'}{L}} \cdot \frac{c\, r}{\nu\, D}.$$

Подставляя числовые данные, получаем ответ: $D' = 4$ м.

Заметим, что в этом решении предполагалось, что и зеркало АДКС, и принимающая антенна имеют форму круга. Однако возможна и другая оценка площадей антенн; можно заметить, что при любой одинаковой форме антенн коэффициент, заменяющий $\pi/4$, в обоих случаях будет одинаковым и также сократится.

**3.** На звездном глобусе диаметром 60 см звезды ярче $0^m$ обозначаются кружочками диаметром 6 мм. Площадь кружочков, изображающих звезды от $0^m$ до $+1^m$, в 6 раз меньше, от $+1^m$ до $+2^m$ — еще в 6 раз меньше и т. д. Оцените максимально возможную долю площади глобуса, занятую изображениями звезд.

**Решение:**

Решим промежуточную задачу: выясним, как зависит количество наблюдаемых на небе звезд от предельной звездной величины.

Пусть функция $N(m)$ — это количество звезд на небесной сфере ярче звездной величины $m$. Предположим, что все звезды распределены в пространстве равномерно и имеют строго одну и ту же светимость. Освещенность, создаваемая звездой $m+1$ величины, меньше освещенности, создаваемой звездой величины $m$, в $10^{2/5} \approx 2.512\ldots$ раза по определению понятия звездной величины. Поскольку все звезды по предположению имеют одинаковые светимости, то освещенности, создаваемые ими, обратно пропорциональны квадрату расстояния до них. Тогда предельные расстояния, на которых мы будем наблюдать звезды величин $m$ и $m+1$ (обозначим их $r(m)$ и $r(m+1$ соответственно), относятся как

$$\frac{r(m+1)}{r(m)} = 10^{1/5}.$$

Объемы шаров пропорциональны кубам радиусов и, так как звезды расположены в пространстве равномерно, получается, что

$$\frac{N(m+1)}{N(m)} = 10^{3/5} = \sqrt[5]{1000} \approx \sqrt[5]{1024} = 4.$$

Таким образом, можно сказать, что

$$N(m) = N(0) \cdot 4^m,$$

причем $m$ в данном случае — показатель степени, а не индекс, обозначающий звездную величину.

Насколько правдоподобно полученное нами выражение?

Распределение звезд в пространстве можно считать приблизительно равномерным. На больших расстояниях от Солнца (сравнимых с высотой диска Галактики, т.е. порядка 1 кпк) это предположение будет нарушаться, однако это будет существенно только для очень слабых звезд (с большой видимой звездной величиной). Так что можно считать, что мы получили правдоподобную (возможно, несколько завышенную для самых слабых наблюдаемых звезд) оценку.

Звезды имеют, разумеется, разную светимость. Однако на итоговый результат это никак не влияет. Мы можем разделить все звезды на много отдельных классов так, чтобы в пределах каждого класса светимость звезд была примерно одинаковой. Для каждого отдельного класса полученное выше выражение для $N(m)$ вполне пригодно, а затем мы просто сложим все получившиеся выражения. Результат окажется таким же по структуре, но пригодным для звезд различной светимости.

Наконец, мы совершенно не учли межзвездное поглощение. Оно вносит в целом такую же поправку, как и уменьшение средней концентрации звезд на больших расстояниях, однако, поскольку среднее межзвездное поглощение в окрестности Солнца составляет около $1^m$/кпк, эта поправка также будет невелика.

Тем самым мы доказали утверждение, известное в астрономии как теорема Зеелигера: $N(m+1)/N(m) \approx 4$ (точнее, 3.98, хотя для решения данной задачи это несущественно), и обнаружили, что для больших $m$ отношение будет немного уменьшаться.

Теперь получим выражение для функции $P(m)$ — количества звезд, видимая звездная величина которых заключена в пределах от $m$ до $m+1$. Очевидно, что

$$P(m) = N(m+1) - N(m) = N(0) \cdot 4^{m+1} - N(0) \cdot 4^m = 3 \cdot N(0) \cdot 4^m.$$

Нам нужно из каких-либо соображений оценить $N(0)$. С одной стороны, это попросту количество звезд от $-1^m$ до $0^m$. Все звезды ярче нулевой звездной величины известны (Сириус, Канопус, Арктур), причем Сириус ярче и $-1^m$, так что $N(0) = 2$. С другой стороны, ясно, что для малого числа звезд случайные отклонения $N(0)$ могут оказаться достаточно заметными, поэтому надежнее вспомнить, что $N(6) \approx 6 \cdot 10^3$. Тогда $N(0) = 6 \cdot 10^3/4^6 \approx 1.5$, так что случайные отклонения не так уж велики. Для определенности (и с учетом необходимости получить максимальную сверху оценку) примем $N(0) = 2$. Заметим, что при этом оказывается, что $P(-1) = 3$, что позволяет легко учесть и Сириус.

Теперь займемся исходной задачей. Как мы уже выяснили, количество звезд, соответствующих следующей звездной величине, в 4 раза больше, чем количество звезд, соответствующих предыдущей. При этом площадь кружка на глобусе, соответствующего звезде следующей звездной величины, в 6 раз меньше. Следовательно, суммарные площади кружков звезд $m$-ой величины и $(m+1)$-ой величины отличаются в $4/6 = 2/3$ раза. Тут мы предполагаем, что кружки, изображающие звезды, практически не перекрываются, что, во-первых, вполне правдоподобно (достаточно вспомнить вид любого звездного глобуса) и, во-вторых, оправдано, так как мы пытаемся получить максимально возможную оценку площади, занятой кружками. Тогда суммарную площадь изображений звезд с звездными величинами от $m$ до $m+1$ можно выразить как:

$$S(m) = (2/3)^{m+1} \cdot S(-1),$$

а общую площадь всех изображений всех звезд как

$$S = \sum_{m=-1}^{\infty} S(k) = S(-1) \cdot \sum_{m=-1}^{\infty} (2/3)^m$$

Воспользовавшись формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии, получаем

$$S = \frac{9}{2} \cdot S(-1)$$

$S(-1)$ — это утроенная площадь кружка, изображающего самые яркие звезды. Таким образом, доля поверхности глобуса, занятая изображениями звезд, вычисляется как:

$$\eta = \frac{9/2 \cdot 3\pi/4 \cdot d^2}{\pi D^2},$$

где $d = 6$ мм (диаметр изображения яркой звезды), $D = 600$ мм (диаметр глобуса). Подставляя числовые данные, получаем окончательный ответ: $\eta \approx 3 \cdot 10^{-4}$, т.е. изображения звезд занимают около 0.03 % поверхности глобуса.

**4.** В начале этого года телевидение города Апатиты сообщило, что полярная ночь в Апатитах закончится в некоторый день. По-видимому, журналисты позаимствовали эту информацию у коллег из Мурманска, для которого названная дата действительно была верной. На сколько суток раньше по сравнению с «прогнозом» закончилась полярная ночь в Апатитах? Широта Апатитов — $67°34'$, широта Мурманска — $68°58'$.

**Решение:**

Окончание полярной ночи означает, что в истинный солнечный полдень край Солнца показывается над горизонтом. Следовательно, учитывая рефракцию и размеры диска Солнца, получаем, что в день окончания полярной ночи на данной широте склонение Солнца должно быть таким, чтобы высота центра Солнца в верхней кульминации была $h \approx -0°45'$. Отсюда следует, что склонение Солнца в день окончания полярной ночи в Апатитах должно быть равно

$$\delta_A = \varphi - 90° + h = 67°34' - 90° - 0°45' = -23°11',$$

а в Мурманске —

$$\delta_M = 68°58' - 90° - 0°45' = -21°47'.$$

Если взять за точку отсчета дней в году дату зимнего солнцестояния, то изменение склонения Солнца с номером дня года можно аппроксимировать следующим образом:

$$\delta_\odot = -\varepsilon \cdot \cos d,$$

где $\varepsilon \approx 23°26'$ — угол наклона эклиптики к экватору Земли, а $d$ — угол в градусах, равный по абсолютной величине номеру дня (т.к. количество градусов в полной окружности и количество дней в году практически равны). Отсюда

$$\cos d = \frac{|\delta_\odot|}{\varepsilon}$$

Очевидно, что угол $d$ в обоих случаях достаточно мал для того, чтобы воспользоваться приближением $\sin d \approx (\pi\, d/180°)$, поэтому воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 d = 1 - \cos^2 d = 1 - \frac{\delta_\odot^2}{\varepsilon^2} = \frac{(\varepsilon - |\delta_\odot|)(\varepsilon + |\delta_\odot|)}{\varepsilon^2} \approx \frac{(\varepsilon - |\delta_\odot|) \cdot 2\,\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{2\,(\varepsilon - |\delta_\odot|)}{\varepsilon}$$

Подставляя числа, получаем $\sin^2 d_A \approx 2 \cdot 10^{-2}$, $\sin^2 d_M \approx 14 \cdot 10^{-2}$.

Таким образом, исходная разность составляет

$$d_M - d_A = \frac{180}{\pi}\sqrt{2}(\sqrt{7} - 1) \cdot 10^{-1} \approx 13 \text{ дней}.$$

**5.** При наблюдении одной и той же области в межзвездной среде наблюдаются две отдельных линии, соответствующие переходам электронов в атоме водорода со 158 на 157 уровень и со 157 на 156 уровень. Оцените длины волн, на которых наблюдаются эти линии. Получите оценку максимально возможного давления газа, испускающего такое излучение.

**Решение:**

Как известно, выражение для длины волны излучения, испускаемого или поглощаемого атомом водорода при переходе электрона между уровнями $i$ и $k$ (формула Ридберга для атома водорода), может быть записано в виде

$$\lambda_{ik} = L_c \cdot \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{i^2}\right)^{-1},$$

где $L_c = 912\,\mathring{A}$ , длина волны лаймановского континуума, соответствующая энергии ионизации атома водорода с первого уровня.

Ответ на первый вопрос задачи может быть получен непосредственно путем подставления данных в эту формулу, однако лучше сначала ее немного преобразовать. Так как нас интересует случай $i = k + 1$, причем $k \gg 1$, воспользуемся следующим приближением:

$$\lambda_{(k+1)k} = \lambda_k = L_c \cdot \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)^{-1} = L_c \cdot \frac{k^2\,(k+1)^2}{(k+1)^2 - k^2} = L_c \cdot \frac{k^2\,(k+1)^2}{2 \cdot k + 1} \approx \frac{L_c}{2} \cdot k^3.$$

Теперь в это выражение можно подставлять данные. Результат для обеих линий будет не слишком сильно отличаться и составит около 18 см (точнее, 17.3 см и 17.6 см).

Заметим, что разность длин волн линий можно получить более эффективным образом. Вычислим дифференциал $\lambda_k$ как функции номера уровня $k$. Получим

$$d\lambda_k = \frac{3}{2}\,L_c k^2\,dk.$$

Учитывая, что $dk = 1$, получим тот же результат, что и выше — разность длин волн составляет 0.3 см.

Для оценки максимально возможного давления газа оценим его концентрацию и температуру. Несложно догадаться, что атомы, электроны в которых находятся на таких высоких уровнях, ионизуются (или, наоборот, рекомбинируют) при первом же столкновении. Следовательно, они, по крайней мере, не могут пересекаться в пространстве. По той же причине можно считать газ приближенно идеальным — любое существенное взаимодействие атомов привело бы к их переходу в другое состояние.

Оценим размер одного атома. Энергия уровня с номером $k$ равна $E_k = E_1/k^2$ (об этом несложно догадаться, вспомнив вид формулы Ридберга). Из того, что энергия уровня даже в рамках простейшей планетарной модели атома определяется потенциальной энергией электростатического взаимодействия электрона и ядра, можно сделать вывод, что она обратно пропорциональна радиусу соответствующей орбиты. Следовательно, радиус атома водорода пропорционален квадрату номера уровня, на котором находится электрон. Вспомнив (или оценив) диаметр атома водорода в невозбужденном состоянии (около $1\,\mathring{A}$ ), получаем, что диаметр интересующих нас атомов составляет около $2.4 \cdot 10^{-6}$ м. Увеличим эту оценку на порядок-полтора, учитывая, что атомы не только не должны «пересекаться», но расстояние между ними должно быть по крайней мере в несколько раз больше их размеров. Тогда характерный размер области, занятый одним атомом, окажется порядка $10^{-4}$ м или более, следовательно, концентрация атомов ограничена сверху величиной $10^{12}$ м$^{-3}$.

Оценку температуры можно попытаться провести несколькими различными путями, не все из которых являются верными.

Во-первых, можно обратить внимание на то, что обе линии наблюдаются раздельно и, следовательно, их тепловое уширение достаточно мало. Однако, поскольку, как мы уже знаем, расстояние между линиями составляет примерно 1/50 их длины волны, этот факт означает, что тепловые скорости атомов по крайней мере на два порядка меньше световой. Это, безусловно, верная, но совершенно бесполезная оценка: очевидно, что она ограничивает температуру сверху величинами, при которых даже невозбужденные атомы не смогли бы существовать.

Во-вторых, можно оценить температуру, соответствующую энергии ионизации атома водорода со $150 \div 160$ уровней. Это можно сделать различными путями: либо зная энергию ионизации с первого уровня, либо пользуясь известным фактом, что эта же энергия соответствует температурам порядка $10^4$ K, либо просто сосчитав энергию электростатического взаимодействия протона и электрона, зная радиус орбиты. Любая подобная, даже самая грубая оценка приведет к тому, что температура ионизации рассматриваемых атомов окажется около 1 K.

Однако такая температура в межзвездной среде невозможна из-за существования реликтового излучения. Любая, самая холодная область межзвездной среды должна иметь температуру не ниже температуры реликтового фона, т.е. 2.7 K. Поэтому в качестве оценки температуры можно сразу взять $2 \div 3$ K. Тот факт, что переходы между высокими уровнями атомов в межзвездной среде возникают только в самых холодных ее областях, может быть и известен сразу, и тогда оценка температуры как совпадающей с температурой реликтового излучения получится сразу же.

Осталось воспользоваться уравнением состояния идеального газа $p = nkT$. В единицах СИ $p \sim 10^{-23} \cdot 10^{12} \cdot 10^{0} \sim 10^{-11}$ Па.

Естественно, полученная оценка может достаточно заметно меняться в зависимости от принятых величин концентрации и температуры. В реальности газ в областях, в которых возникают подобные радиолинии, как правило, имеет еще меньшую концентрацию, так что полученная нами оценка концентрации (и, следовательно, давления) завышена.