

10 класс

1. Ахиллес, Кваоар, Прозерпина, Фемида, Юнона. Укажите лишнее в этом списке и обоснуйте свой выбор.

Решение:

Лишний Кваоар, т.к. он принадлежит к поясу Койпера. Все остальные объекты — астероиды главного пояса. Даже если это не знать, догадаться можно по виду названий объектов. Все перечисленные астероиды главного пояса имеют имена, взятые из античной мифологии, а название «Кваоар» явно имеет другие семантические корни. Кваоар был назван именем божества-созидателя у индейцев племени Тонгва.

2. Звезда Вега имеет видимую звездную величину 0^m . Какую звездную величину она бы имела, если бы находилась на расстоянии в 1 000 раз большем, чем сейчас? Была бы она при этом видна невооруженным глазом?

Решение:

Известно, что освещенность от точечного источника E (количество энергии, падающей перпендикулярно на площадку единичной площади за единицу времени) обратно пропорциональна квадрату расстояния r до него ($E \propto 1/r^2$, см. задачу 2 за 9 класс). Таким образом, если бы Вега находилась от нас на расстоянии в 1 000 раз большем, чем сейчас, то освещенность, создаваемая ею на Земле, была бы в 10^6 раз меньше. Как известно, уменьшение освещенности в 100 раз соответствует увеличению звездной величины на 5^m , поэтому звездная величина Веги увеличилась бы на $5^m + 5^m + 5^m = 15^m$. Тогда Вега имела бы 15^m величину и не была бы видна невооруженным глазом (человек без оптических приборов может увидеть звезды до 6^m).

Можно решить задачу и другим путем. Абсолютная звездная величина M , которая фиксирована для каждой конкретной звезды, связана с видимой звездной величиной m и расстоянием r (выраженным в парсеках) следующим образом:

$$M = m + 5 - 5 \lg r.$$

Так как $M_1 = M_2 = M$, то $m_1 + 5 - 5 \lg r_1 = m_2 + 5 - 5 \lg r_2$. Отсюда, применяя свойства логарифмов, имеем

$$m_2 - m_1 = 5(\lg r_2 - \lg r_1) = 5 \lg \frac{r_2}{r_1} = 5 \lg(1\,000) = 5 \cdot 3 = 15.$$

Так как $m_1 = 0$, следовательно, $m_2 = 15$.

3. Два небольших одинаковых шарообразных астероида образуют двойную систему, практически соприкасаясь поверхностями. Во сколько раз изменится сила притяжения между астероидами из того же вещества в аналогичной системе, если массу каждого из астероидов увеличить в восемь раз?

Решение:

Сила притяжения между астероидами равна

$$F = \frac{GM_1M_2}{r^2}.$$

Так как массы и радиусы астероидов равны ($M_1 = M_2 = M$ и $R_1 = R_2 = R$) и астероиды соприкасаются поверхностями ($r = R_1 + R_2 = 2R$), то

$$F = \frac{GM^2}{4R^2}.$$

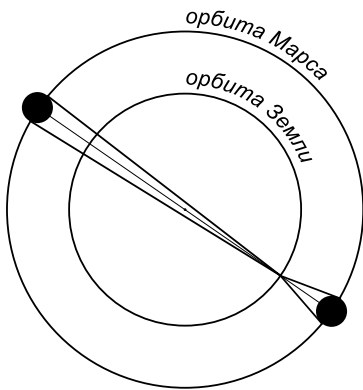
При неизменной плотности (астероид из того же вещества) масса астероида пропорциональна его объему и, следовательно, кубу радиуса ($M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$, где ρ — плотность астероида). Поэтому $R \propto M^{1/3}$. Таким образом,

$$F \propto \frac{M^2}{R^2} \propto \frac{M^2}{M^{2/3}} = M^{4/3},$$

т.е. сила притяжения между «новыми» астероидами увеличится в $8^{4/3} = 16$ раз.

4. Найдите отношение максимально возможного и минимально возможного угловых размеров Марса при наблюдении с Земли. Период обращения Марса вокруг Солнца составляет примерно 2 года. Орбиту Марса считать круговой.

Решение:



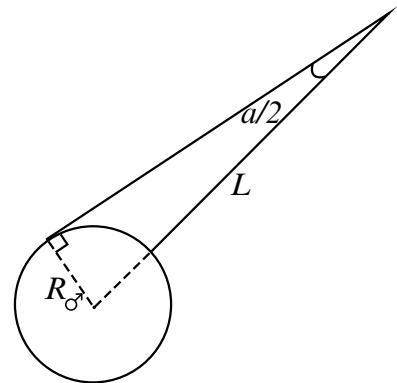
Из рисунка видно, что максимально возможный угловой размер α_{\max} Марс будет иметь тогда, когда Марс, Солнце и Земля окажутся на одной прямой, причем обе планеты будут расположены по одну сторону от Солнца (такое положение планеты, в данном случае Марса, относительно Земли и Солнца называется противостоянием), а минимальный угловой размер α_{\min} — когда все три светила также расположены на одной прямой, но планеты находятся по разные стороны от Солнца (такая положение (конфигурация) планеты называется соединением).

Угловой размер Марса α в произвольный момент времени можно найти следующим образом (см. рис.):

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R_{\text{М}}}{L},$$

где $R_{\text{М}}$ — радиус Марса, L — расстояние от Марса до Земли. Вследствие малости углового размера Марса значение синуса этого угла практически совпадает с величиной угла, выраженного в радианах, т.е.

$$\alpha \approx \frac{2R_{\text{М}}}{L}.$$



Таким образом, отношение максимально и минимально возможных угловых размеров Марса равно:

$$\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\min}} \approx \frac{L_{\min}}{L_{\max}}.$$

Очевидно, что в противостоянии $L_{\max} = r_{\text{♂}} - r_{\oplus}$, а в соединении $L_{\min} = r_{\text{♂}} + r_{\oplus}$, где $r_{\text{♂}}$ — радиус орбиты Марса, r_{\oplus} — радиус орбиты Земли. Радиус орбиты Марса в астрономических единицах можно вычислить, воспользовавшись III законом Кеплера. Если период обращения Марса вокруг Солнца в годах $P_{\text{♂}}$, то $P_{\text{♂}}^2 = r_{\text{♂}}^3$. Отсюда

$$r_{\text{♂}} = P_{\text{♂}}^{\frac{2}{3}} \approx 1.6 \text{ а.е.}$$

Окончательно получаем

$$\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\min}} \approx \frac{r_{\text{♂}} + r_{\oplus}}{r_{\text{♂}} - r_{\oplus}} \approx \frac{2.6}{0.6} \approx 4.3$$

Можно отметить, что на самом деле радиус орбиты Марса ближе к 1.5 а.е. и, соответственно, его угловой размер меняется примерно в 5 раз.

5. 1 декабря этого года произошло покрытие Луной рассеянного звездного скопления Плеяды. Оцените продолжительность покрытия. Известно, что расстояние до Плеяд составляет 130 пк, размер скопления около 13 световых лет.

Решение:

От момента, когда диск Луны начнет находить на Плеяды, до момента, когда Луна полностью пройдет скопление, Луна должна пройти 2 своих радиуса (т.е. один диаметр — $0^\circ.5$), а также диаметр скопления α . Угловой диаметр скопления (в радианах) можно получить следующим образом (см. решение предыдущей задачи):

$$\alpha = \frac{D}{L},$$

где D — линейный диаметр скопления, L — расстояние до него.

Учитывая, что $1 \text{ пк} \approx 3.26 \text{ св. года}$, получаем

$$\alpha = \frac{13}{130 \cdot 3.26} = \frac{1}{32.6} \text{ рад} \approx 1^\circ.8.$$

Таким образом, за время покрытия Луна должна пройти примерно $2^\circ.3$ по небесной сфере. Угловую скорость движения Луны по небесной сфере можно оценить, зная, что полный оборот вокруг Земли (360°) она совершает примерно за один месяц (точнее, за 27.3 суток), т.е. $12^\circ - 13^\circ$ в сутки. Следовательно, покрытие будет продолжаться $0.17 - 0.19$ суток, или около 4.3 часов.