XVII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

районный тур, решения

2009

5 декабря

9 класс

1. Церера, Каллисто, Ида, Гаспра, Веста. Укажите лишнее в этом списке и обоснуйте свой выбор.

Решение:

Лишнее в этом списке Каллисто, т.к. все остальные перечисленные объекты являются астероидами, а Каллисто — спутник Юпитера.

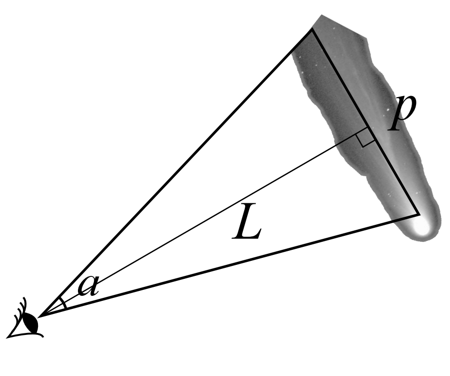
2. Разность звездных величин двух звезд одинаковой светимости равна 5^m. Во сколько раз одна из них дальше другой?

Решение:

Известно, что, если разность звездных величин звезд равна 5, то одна из них ярче другой в 100 раз. Так как светимость звезд одинакова, различие в яркости обусловлено тем, что одна (более слабая) находится дальше от наблюдателя, чем другая. Звезда — практически сферически-симметричный объект и равномерно излучает во всех направлениях. Вся энергия, излученная звездой, равномерно распределяется по площади воображаемой сферы, на «поверхности» которой находится наблюдатель. Чем больше радиус этой сферы, т.е. расстояние от звезды до наблюдателя, тем больше площадь и тем меньшая энергия излучения приходится на единицу этой площади. Так как площадь сферы пропорциональна квадрату ее радиуса, то энергия, приходящая за единичное время на площадку единичной площади от звезды E, обратно пропорциональна квадрату расстояния r до нее, т.е. $E \propto 1/r^2$. Отсюда следует, что $r \propto 1/\sqrt{E}$ и, таким образом, одна звезда дальше другой в $\sqrt{100} = 10$ раз.

3. Пролетающая мимо Земли на расстоянии 1 а.е. комета имеет хвост с угловым размером $0^\circ.5$. Оцените длину хвоста кометы в километрах.

Решение:



Предположим, что хвост кометы направлен перпендикулярно к лучу зрения. Тогда его длину можно оценить так. Обозначим угловой размер хвоста α. Половину этого угла $\alpha/2$ можно найти (см. рисунок) из прямоугольного треугольника, одним из катетов которого является половина длины хвоста кометы $p/2$, а другим — расстояние от Земли до кометы L. Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha/2 = \frac{p/2}{L}.$$

Угол $0^\circ.5$ мал, поэтому можно приближенно считать, что его тангенс равен самому углу (выраженному в радианах). Тогда мы можем записать, что $\alpha \approx p/L$. Отсюда, вспоминая, что астрономическая единица составляет $150 \cdot 10^6$ км, получаем

$$p \approx L \cdot \alpha \approx 150 \cdot 10^6 \cdot (0.5/57) \approx 1.3 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

Есть и другой вариант оценки. Можно заметить, что комета пролетает от Земли на расстоянии, равном расстоянию от Земли до Солнца, а ее хвост имеет угловой размер, равный видимому угловому диаметру Солнца на земном небе. Следовательно, линейный размер хвоста равен диаметру Солнца, величина которого близка к полученному выше результату.

Однако у нас нет информации о том, как ориентирован хвост кометы в пространстве. Поэтому следует заключить, что полученная выше оценка длины хвоста — это *минимальное* возможное значение. Таким образом, итоговый ответ выглядит так: длина хвоста кометы составляет не менее 1.3 миллиона километров.

4. По массе водорода во Вселенной 75%, а гелия 25%. Каких атомов во Вселенной больше (водорода или гелия) и во сколько раз?

Решение:

Среди существующих в природе трех изотопов водорода наиболее распространен (не менее 99.99%) изотоп, масса атома которого равна 1 атомной единице массы. Из двух существующих изотопов гелия более распространен (не менее 99.9999%) изотоп, масса атома которого равна 4 а.е.м. Поэтому можно с очень хорошей точностью считать, что каждый атом гелия в 4 раза массивнее каждого атома водорода. Если по массе водорода во Вселенной в три раза больше, чем гелия, то по количеству атомов водорода будет больше в $3 \cdot 4 = 12$ раз.

5. Оцените отношение массы Марса к массе Земли, сравнивая движение Луны вокруг Земли с движением марсианского спутника Фобос, совершающего полный оборот вокруг Марса по практически круговой орбите с радиусом $9 \cdot 10^3$ км за 0.3 земных суток. Радиус орбиты Луны считать равным $4 \cdot 10^5$ км.

Решение:

Для решения этой задачи проще всего воспользоваться обобщенным III законом Кеплера:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)},$$

где P — период обращения спутника, a — большая полуось его орбиты, G — гравитационная постоянная, M — масса планеты, m — масса спутника. Очевидно, массами спутников по отношению к массам планет можно пренебречь. Тогда

$$\frac{P_{☾}^2}{a_{☾}^3} \cdot \frac{a_{\text{Фобос}}^3}{P_{\text{Фобос}}^2} = \frac{M_{♂}}{M_{\oplus}},$$

где величины со значком $\oplus$ относятся к Земле, с ♂ — к Марсу, а с ☾ — к Луне.

Подставив числа, найдем

$$\frac{M_{♂}}{M_{\oplus}} = \frac{30^2}{(4 \cdot 10^5)^3} \cdot \frac{(9 \cdot 10^3)^3}{(0.3)^2} \approx 0.1.$$

Можно не пользоваться готовым III законом Кеплера, а вывести его для случая движения по круговым орбитам. Спутник массы m движется вокруг планеты массы M по круговой орбите радиуса r под действием силы тяготения:

$$F = \frac{GMm}{r^2},$$

следовательно, по II закону Ньютона ($F = ma$), на него действует ускорение, равное

$$g = \frac{GM}{r^2}.$$

С другой стороны, при равномерном движении по окружности это ускорение равно

$$g = \frac{v^2}{r}.$$

Отсюда получаем, что скорость равномерного движения по окружности под действием силы тяготения равна

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Так как длина окружности равна $2\pi r$, то время, за которое спутник совершит полный оборот вокруг планеты (т.е. период обращения), равно

$$P = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}}.$$

Отсюда с помощью несложных преобразований получаем:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM},$$

что совпадает с III законом Кеплера.